Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année universitaire : 2011/12
Module 1 de Physique (SMIA)

TD Thermodynamique – Série 1

❖ Formes différentielles et intégration – Equation d'état

1) Calculer la différentielle de la fonction : $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^2} - 2x^3y^2$

2) On considère les formes différentielles suivantes:

$$\delta f = \frac{x^2}{y^2}dx - \frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3}dy$$

$$\delta g = \left(\frac{x^2}{y} - 2y\right)dx - \left(\frac{x^3}{y^2} + 3x\right)dy$$

a) Laquelle de ces deux formes est une différentielle totale?
b) Déterminer alors la fonction correspondante.

3) Montrer que la forme différentielle suivante est exacte:

$$\delta w = -\frac{RT}{V^2}\left(1 + \frac{2A}{V}\right)dV + \frac{R}{V}\left(1 + \frac{A}{V}\right)dT$$

où A et R sont des constantes.

δw représente en fait la différentielle dP de la pression d'un gaz, en déduire alors l'équation d'état de ce gaz

❖ Fonctions implicites

(L'exercice N°4 ne sera pas traité en TD, veuillez bien de le faire à la maison)

4) On considère l'équation d'état d'un système $f(P,V,T)=0$, où P, V, et T sont les paramètres d'état du système.

a) Donner les expressions de dP et dV.
b) En déduire les relations suivantes:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 1 \quad et \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

c) Vérifier ces relations pour une mole de gaz parfait, d'équation d'état: $PV=RT$.

❖ **Coefficients thermo élastiques**

Ces coefficients ont été introduits pour différencier entre deux fluides soumis aux mêmes contraintes mécaniques ou thermiques.
Si l'on considère par, exemple, deux gaz, soumis à une même déformation élastique, et que l'on veut comparer leur dilatation (ou éventuellement, leur compression), il suffit de comparer leur coefficients thermo élastiques qui sont étroitement liés à cette déformation.

Les coefficients thermo élastiques sont définit de la manière suivante:

◊ Coefficient de dilatation "isobare" (à pression constante): $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

◊ Coefficient de dilatation "isochore" (à volume constant): $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

◊ Coefficient "isotherme" (à température constante): $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

5°) Exprimer en fonction des variables indépendantes P et T, les coefficients thermo élastiques d'un gaz parfait.

6°) Une mole de gaz obéit à l'équation suivante:

$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$, où a et R sont des constantes.

a) Exprimer, en fonction des variables indépendantes V et T, les coefficients de dilatation à pression constante α et à volume constant β de ce gaz.

b) Trouver la relation générale liant le coefficient de compressibilité isotherme χ, les coefficients α et β, et la pression P du gaz.
En déduire l'expression du coefficient χ de ce gaz.

c) Dans le cas où l'on peut négliger la pression interne du gaz ($a \approx 0$), montrer que χ peut être écrit sous la forme: $\chi = \frac{V}{R} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta}$

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année universitaire 2011/2012
Module 1 de Physique (SMIA)

TD Thermodynamique - Série 2

Exercice n° 1 : ***Thermométrie***

L'échelle Fahrenheit, en usage encore dans de nombreux pays anglo-saxons, se déduit de l'échelle Celsius par une transformation affine.

Par définition, on a : $32\,^oF = 0\,^oC$, et $212\,^oF = 100\,^oC$.

a) Donner la relation reliant ces deux échelles.

b) Convertir $30\,^oC$ en ^{o}F.

c) A quelle température les deux échelles donnent-elles les mêmes indications ?

Exercice n° 2 : ***Conception d'un thermomètre à liquide***

Vous voulez construire un thermomètre donnant des températures comprises entre 0°C et 200°C. Vous disposez d'un tube capillaire cylindrique en verre qui pour une longueur de tige utile de 30cm contient un volume de 24 mm^3. Ce capillaire est relié à un réservoir de verre. Calculez :

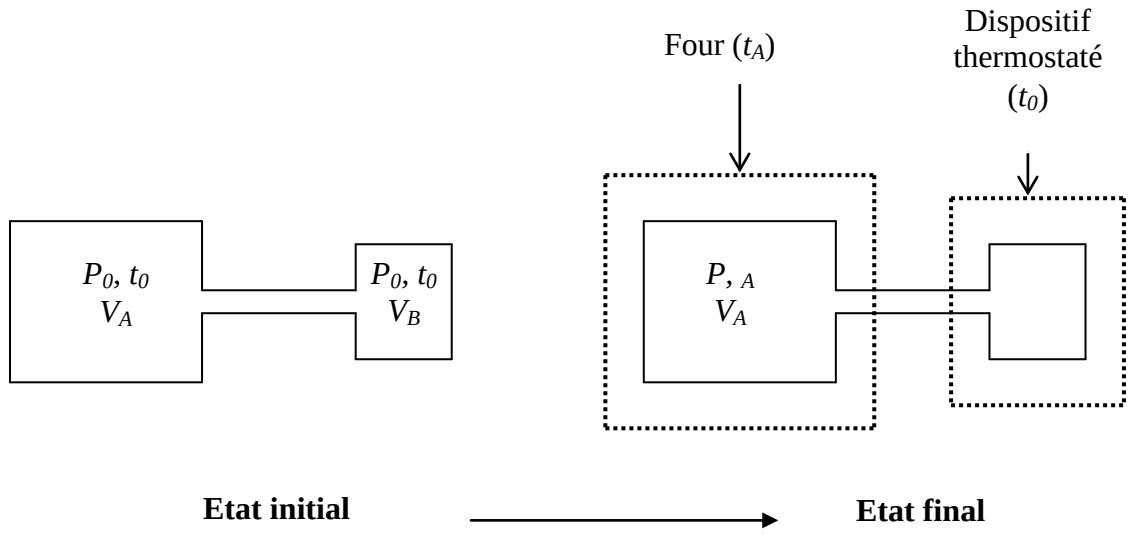
1. Le volume du réservoir.
2. La masse de mercure à utiliser.
3. La sensibilité de l'appareil en mm^3 par °C.
4. Quelle pourrait être la résolution de l'appareil ? Cela induirait-il une graduation aisée ? Que proposeriez-vous comme graduation ?

Données : densité du mercure à 0°C : d_{Hg} = 13,6 ; coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre : α =1/6400 ($°C^{-1}$) ; la distance entre deux graduations ne peut être inférieure à 0,5 mm.

Exercice n° 3: ***Gaz parfait***

Dans deux compartiments communiquant *A* et *B*, on enferme initialement de l'air sous la pression P_0 et à la température t_0.

Le compartiment *A* est introduit dans un four dont la température est réglée à t_A. Le compartiment *B* est maintenu, grâce à un dispositif thermostaté, à sa température initiale t_0.
En assimilant l'air à un gaz parfait, trouver la pression d'équilibre dans les deux compartiments? (***AN*** : $t_0 = 20\ °C$; $t_A = 500\ °C$; $V_A = 12\ l$; $V_B = 4\ l$; $P_0 = 1\ bar$.)



Exercice n° 4: ***Théorie cinétique des gaz***

Un récipient cubique contient, dans les conditions normales de pression et de température ($P_0 = 10^5\ Pa$, $T_0 = 273\ K$), dix moles d'oxygène de masse molaire $M = 32\ g$.

1- En supposant que ce gaz est parfait, déterminer puis calculer numériquement:
   a) Le nombre de particules de ce gaz.
   b) Le volume *V* du récipient et son arête *a*.
   c) La densité particulaire ρ exprimée en nombre de particules par m^3 et mm^3.
   d) La masse m d'une particule d'oxygène.
   e) Son énergie cinétique moyenne de translation $e_{c,tr}$ et sa vitesse quadratique moyenne *u*.
   f) Le volume τ offert à chaque particule.

2-a) En considérant que le volume τ (offert à chaque particule) est un cube élémentaire, en déduire la distance moyenne *d* entre deux particules voisines et la comparer au diamètre ϕ d'une molécule d'oxygène (supposée sphérique) dans l'hypothèse où les dimensions de celle ci ne sont plus négligeables.

2-b) Conclure.

On donne: ϕ_{O2} = 3,5 Å ; La constante de Boltzmann $k_B = 1{,}38\ 10^{-23}\ J.K^{-1}$; Le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6{,}023\ 10^{23}\ mol^{-1}$.

TD Thermodynamique - Série 3

Echanges d'énergie ; travail, chaleur et énergie interne

Exercice N°1

Calculer le travail échangé lors de la compression isotherme d'une mole de gaz parfait de l'état ($P_1 = 2$ atm, $T_1 = 300$ K) à l'état $P_2 = 5\ P_1$, dans les trois cas suivants:

1) Transformation réversible.
2) Compression brusque de P_1 à P_2.
3) Compression brusque de P_1 à $P_3 = 2\ P_2$ puis détente de P_3 à P_2.

On donne: $R = 8{,}32\ J.K^{-1}$.

Exercice N°2

L'état initial d'une mole de gaz parfait est caractérisé par $P_0 = 2.10^5$ Pa, $V_0 = 14$ l. (*On donne* : $R = 8{,}32\ J.K^{-1}$). Ce gaz subit successivement:

- ❖ Une détente isobare, qui double son volume,
- ❖ Une compression isotherme, qui le ramène à son volume initial,
- ❖ Un refroidissement isochore, qui le ramène à l'état initial (P_0, V_0).

1) Déterminer l'état du gaz (pression, volume et température) après chaque transformation. Représenter le cycle de transformation dans le diagramme de Clapeyron.
2) Calculer le travail et la quantité de chaleur échangés par le gaz au cours de ce cycle.

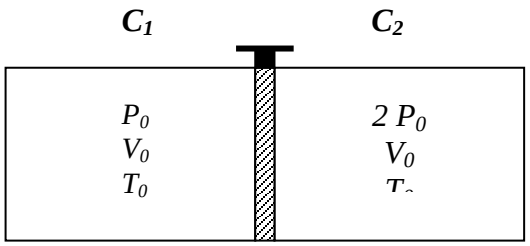
Exercice N°3

On considère un cylindre horizontal rigide, clos et adiabatique. Il est séparé en deux compartiments, C_1 et C_2, par un piston mobile sans frottement. Le piston est en isolant thermique et ses déplacements sont supposés quasi-statiques.

A) Système isolé

Un gaz parfait est emprisonné dans chacun des compartiments. Initialement, dans C_1 le gaz est dans l'état (P_0, V_0, T_0); et dans C_2, l'état du gaz est ($2\ P_0$, V_0, T_0).

Le piston est fixé au départ.

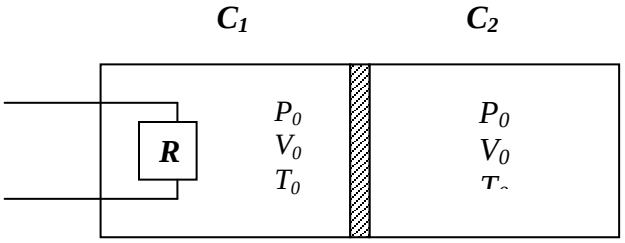


On libère le piston mobile. Lorsque l'équilibre est établi, déterminer les paramètres d'état (pression, volume et température) dans chaque compartiment.

Données : γ ; *A.N. : P_0 = 1 atm; $\gamma = \frac{7}{5}$; V_0 = 2 l; T_0 = 300 K.*

B) Système non isolé

On introduit une résistance chauffante dans le compartiment C_1. L'état initial du gaz parfait est maintenant identique dans chaque compartiment (P_0, V_0, T_0). On chauffe lentement le compartiment C_1 jusqu'à une pression $P_1 = 5\ P_0$.



1) Déterminer les pressions, volumes et températures dans chaque compartiment.
2) Calculer la variation d'énergie interne du gaz dans chaque compartiment.
   En déduire la chaleur Q fournie par la résistance R.

Données : γ ; *A.N. : P_0 = 1 atm; $\gamma = 7/5$; V_0 = 2 l; T_0 = 300 K.*

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année universitaire 2011/2012
Module 1 de Physique (SMIA)

TD Thermodynamique - Série 4

Exercice n°1

1) On mélange *40 litres* d'eau à *70 °C* et *30 litres* d'eau à *10 °C*.
   a) Quelle est la température (d'équilibre) du mélange ?
   b) Calculer la variation totale d'entropie au cours du mélange.

2) Pour remplir une baignoire de *150 litres*, on dispose d'eau à *75 °C*. Dans quelle proportion faut-il la mélanger avec de l'eau à *12 °C* pour obtenir de l'eau à *35 °C* ?

On donne: la chaleur massique de l'eau, supposée constante, $C_{Pm} = 4{,}18\ J.g^{-1}\ K^{-1}$.

Exercice n°2 : cycle d'un moteur Diesel

Une mole de gaz parfait subit les transformations réversibles suivantes:

état (1) → état (2)	Compression adiabatique
état (2) → état (3)	Dilatation à pression constante
état (3) → état (4)	Détente adiabatique
état (4) → état (1)	Refroidissement à volume constant

Chaque état est défini par la pression P_i, la température T_i et le volume V_i (i variant de *1* à *4*).

On définit: $a = \frac{V_1}{V_2}$ et $b = \frac{V_4}{V_3}$.

1) Représenter sommairement le cycle sur un diagramme de Clapeyron. Donner les expressions de la pression, du volume et de la température pour les états (2), (3) et (4), en fonction de P_1, V_1, T_1, a et b. Calculer numériquement ces valeurs.

2) Calculer les travaux et chaleurs échangés pour toutes les transformations subies. Préciser notamment le sens des échanges.

3) Proposer une expression pour le rendement $\mathfrak{R}$ d'un moteur fonctionnant suivant ce cycle, en fonction des travaux et chaleurs échangés.

Donner l'expression du rendement $\mathfrak{R}$ *en fonction de* γ, a *et* b. *Calculer* $\mathfrak{R}$.

On donne : $\gamma = 1{,}4$; $a = 9$; $b = 3$; $P_1 = 10^5\ Pa$; $T_1 = 300\ K$; $C_{VM} = 20{,}8\ J.mol^{-1}.K^{-1}$; $R = 8{,}32\ J.mol^{-1}.K^{-1}$

Exercice n°3 : pompe à chaleur classique

Pour maintenir la température d'un immeuble à $t_1 = 20°C$ alors que la température est $t_2 = 5°C$ à l'extérieur, il faut lui fournir (c.à.d à l'immeuble) une énergie de $2\ 10^8\ J$ à l'heure. On posera $T = t + 273$.

a) On utilise pour cela une pompe à chaleur. Indiquer dans quelles conditions celle-ci doit fonctionner pour que la puissance consommée soit minimale.
   Donner le schéma de principe en indiquant par des flèches le sens des échanges de chaleur et de travail.

b) Calculer cette puissance minimale consommée par la pompe à chaleur.

c) Définir et calculer le coefficient de performance théorique maximal (ou efficacité thermique maximale) "e_p" de cette pompe dans ces conditions; montrer qu'elle ne dépend que de t_1 et de t_2. Indiquer clairement la signification de "e_p".

d) La température extérieure étant toujours $t_2 = 5°C$, pour quelle température t_1 à l'intérieur e_p est-il maximum ? Interpréter. Dans quelles circonstances la pompe à chaleur est-elle surtout utile ?

<u>Exercice n°4</u> : moteur thermique à air

Dans un moteur thermique à air, *n* moles d'air (assimilable à un gaz parfait), décrit le cycle réversible idéalisé suivant:

- Une compression isotherme de l'état **(*1*)** de coordonnées *(P_1 = 1 atm ,V_1 ,T_1 = 360 K)* à l'état **(*2*)** de coordonnées *(P_2 = 8 atm ,V_2 ,T_2).*
- Un échauffement isobare de l'état **(*2*)** à l'état **(*3*)** de coordonnées *(P_3 ,V_3 ,T_3 = 1440 K)*
- Une détente adiabatique de l'état **(*3*)** à l'état **(*4*)** de coordonnées (P_4, V_4, T_4).
- Un refroidissement isobare de l'état **(*4*)** à l'état **(*1*)**.

On donne : *n = 33,4 moles* ; $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$ *; R = 8,32 (J.mol^{-1}.K^{-1}) ; 1 atm = 10^5 Pa*

1) Représenter grossièrement ce cycle moteur dans le diagramme de Clapeyron (*P*, *V*).

2) Déterminer pour chacun des états les coordonnées (P_i, V_i, T_i), avec *i* qui varie de *1* à *4*. Donner vos résultats numériques sous forme d'un tableau de trois colonnes.

3) Donner pour chacune des transformations précédentes l'expression du travail échangé. Le calculer numériquement. Calculer alors le travail global W_{cycle}, produit par le cycle.

4) Donner pour chacune des transformation la quantité de chaleur échangée, la calculer numériquement. En déduire la quantité de chaleur globale Q_{cycle} échangée au cours du cycle.

5) Récapituler les résultats numériques des questions 3) et 4) sous forme d'un tableau. Vérifier alors, le premier principe de la thermodynamique pour le cycle étudié.

6) Distinguer la quantité de chaleur "$Q_{reçue}$" qui est convertie en travail. On définit le rendement du cycle par: $\Re = -\frac{W_{cycle}}{Q_{reçue}}$.
   a) Calculer numériquement $\mathcal{R}$.
   b) Calculer le rendement $\mathcal{R}_C$ du cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes.
   c) Comparer $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_C$.

7) Calculer pour chacune des quatre transformations du cycle la variation d'entropie ΔS_{ij} Vérifier alors Que : $\Delta S_{cycle} = 0$. (Présenter vos résultats numériques sous forme d'un tableau).

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année universitaire : 2011/12
Module 1 de Physique (SMIA)

TD Thermodynamique – Correction de la série N°1

Exercice N°1

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^2}-2x^3y^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y=\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^2}-6x^2y^2 \text{ et } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x=-\frac{x^2}{y^2}-\frac{2x}{y^3}-4x^3y$$

$$Or \quad df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \quad \Rightarrow \quad df=\left(\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^2}-6x^2y^2\right)dx-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y^3}+4x^3y\right)dy$$

Exercice N°2

Rappel : soit la forme différentielle $\delta f = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, la condition nécessaire et suffisante pour que δf soit une différentielle totale (ou exacte) est :

$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y$ on écrit alors : $\delta f = df$

a] i) $\delta f=\frac{x^2}{y^2}dx-\frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3}dy$,

$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x=-2\frac{x^2}{y^3}$ *et* $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y=-2\frac{x^2}{y^3}$. On a $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y \Leftrightarrow \delta f$ *exacte* $(\delta f = df)$

ii) $\delta g=\left(\frac{x^2}{y}-2y\right)dx-\left(\frac{x^3}{y^2}+3x\right)dy$

$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x=-\frac{x^2}{y^2}-2$ *et* $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y=-\left(3\frac{x^2}{y^2}+3\right)\rightarrow\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x\neq\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y \Leftrightarrow \delta g$ *n'est pas exacte .*

b] Déterminons f(x, y)

$$df=\frac{x^2}{y^2}dx-\frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3}dy=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y=\frac{x^2}{y^2} & \rightarrow \quad (E_1)\\ \left(\frac{\partial f}{\partial f}\right)_x=-\frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3} & \rightarrow \quad (E_2)\end{cases}$$

Démarche usuelle : pour résoudre ce système de deux équations (E_1, E_2), aux dérivées partielles du premier ordre, on procède en deux étapes : 1) On intègre la plus simple des deux équations (par exemple (E_1) / à x) et 2) On dérive en suite le résultat obtenu pour le comparer à (E_2).

Etape1 : $(E_1) \Rightarrow \begin{cases} df = \dfrac{x^2}{y^2}dx \\ y = C^{te} \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{y^2} + \phi(y) \rightarrow (E_3)$

Etape2 : déterminons $\phi(y)$

Pour cela on dérive *f(x, y)* de l'équation (E_3) / y et on compare le résultat obtenu à (E_2).

$(E_3) \Rightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -\dfrac{2}{3}\dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{d\phi}{dy}$ en comparant avec (E_2), il vient automatiquement que :

$\dfrac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C^{te} = C$ (C : constante pure qui ne dépend ni de x ni de y)

Et finalement : $f(x,y) = \dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{y^2} + C \quad (C = C^{te})$

Exercice N°3

i) $\delta w = \underbrace{-\dfrac{RT}{V^2}\left(1 + \dfrac{2A}{V}\right)}_{B} dV + \underbrace{\dfrac{R}{V}\left(1 + \dfrac{A}{V}\right)}_{C} dT$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial B}{\partial T}\right)_V = -\dfrac{R}{V^2}\left(1 + 2\dfrac{A}{V}\right) \\ \left(\dfrac{\partial C}{\partial V}\right)_T = -\dfrac{R}{V^2}\left(1 + 2\dfrac{A}{V}\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial C}{\partial V}\right)_T \Leftrightarrow \delta w = dw$$

ii) $dP = dw = \left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\dfrac{RT}{V^2}\left(1 + \dfrac{2A}{V}\right) \rightarrow (E_1) \\ \left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \dfrac{R}{V}\left(1 + \dfrac{A}{V}\right) \rightarrow (E_2) \end{cases}$

- ***Etape1*** : intégrons l'équation (E_2) / T

$(E_2) \Rightarrow \begin{cases} dP = \dfrac{R}{V}\left(1 + \dfrac{A}{V}\right)dT \\ V = C^{te} \end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{RT}{V}\left(1 + \dfrac{A}{V}\right) + \phi(V)$

- ***Etape2*** : dérivons / V et comparons avec (E_1)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{V^2}\left(1 + \frac{2A}{V}\right) \overset{(E_1)}{=} -\frac{RT}{V^2}\left(1 + \frac{2A}{V}\right) + \frac{d\phi}{dV} \Rightarrow \frac{d\phi}{dV} = 0 \Rightarrow \phi(V) = K \ (C^{te} \ pure)$$

$$\Rightarrow P(V,T) = \frac{RT}{V}\left(1 + \frac{A}{V}\right) + K, \quad K = C^{te}$$

Aux faibles pressions ce gaz doit se comporter comme un gaz parfait :
$(PV \rightarrow 0 \quad quand \quad T \rightarrow 0)$. On en déduit alors que K = 0 et l'équation d'état du gaz est :

$$PV = RT\left(1 + \frac{A}{V}\right)$$

Exercice N°4

L'équation d'état $f(P,V,T)=0 \quad \Rightarrow \quad P=P(V,T); V=V(P,T)\ et\ T=T(P,V)$.

a) $$\begin{cases} dP=\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV+\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT \quad \rightarrow \quad (E_1) \\ dV=\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP+\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \quad \rightarrow \quad (E_2) \end{cases}$$

b) A partir de (E_1) on peut écrire :

$$dV = \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} dP - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} dT \qquad \rightarrow \qquad (E_3)$$

Puis en comparant (E_2) et (E_3), on a :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} \text{ soit encore } \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=1}_{(E_4)} \qquad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=-\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

En tenant compte de l'équation (E_4) :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V=-1$$

c) Pour une mole de gaz parfait : $PV = RT$

i) $P=\frac{RT}{V} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=-\frac{RT}{V^2}$

ii) $V=\frac{RT}{P} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{R}{P} \quad et \quad \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=-\frac{RT}{P^2}$

iii) $T=\frac{PV}{R} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V=\frac{V}{R}$

On vérifie alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{RT}{V^2}\frac{RT}{P^2}=1 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \left(-\frac{RT}{V^2}\right)\left(\frac{R}{P}\right)\left(\frac{V}{R}\right)=-1 \end{cases}$$

Exercice N°5

Pour n moles, l'équation d'état du gaz parfait est : $PV = nRT$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{nR}{P}$; $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P=\frac{nR}{V} \quad et \quad \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_P=-\frac{nRT}{P^2}$

D'où $\alpha = \beta = \frac{1}{T}$ *et* $\chi = \frac{1}{P}$

Exercice N°6

L'équation d'une mole de gaz est : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad \rightarrow \quad (1)$

a) Expression des coefficients α et β en fonction des variables indépendantes V et T

- Expression du coefficient $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

En différentiant l'équation (1) à P = C^{te}, on obtient :

$$-2\frac{a}{V^3}(V - b)\,dV + \left(P + \frac{a}{V^2}\right)dV = RdT$$

Eliminons P en remplaçant $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)$ par $\frac{RT}{V - b}$:

$$\left[\frac{RT}{V - b} - 2a\frac{(V - b)}{V^3}\right]dV = RdT \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{RV^2(V - b)}{RTV^3 - 2a(V - b)^2}$$

- Expression du coefficient $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

L'équation (1) s'écrit : $P = \frac{RT}{(V - b)} - \frac{a}{V^2}$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{(V - b)} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{\left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}\right)}\frac{R}{(V - b)} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{RV^2}{RTV^2 - a(V - b)}$$

b) Expression du coefficientχ

D'après l'Exercice N°4 on a :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{\chi V}\right)(\alpha V)\left(\frac{1}{\beta P}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\chi\beta}{\alpha} = \frac{1}{P} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{\alpha}{P\beta}$$

$$\text{Mais } P\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V - b} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{V^2(V - b)^2}{RTV^3 - 2a(V - b)^2}$$

c) A pression interne faible (a → 0)

Lorsque a tend vers 0, α s'écrit alors : $\alpha = \frac{RV^2(V - b)}{RTV^3} = \frac{V - b}{TV}$; $\beta = \frac{1}{T}$ *et* $\chi = \frac{(V - b)^2}{RTV}$

$$\text{Soit } \chi = \frac{(V - b)^2}{T^2V^2}\frac{TV}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \chi = \frac{V}{R}\frac{\alpha^2}{\beta}$$

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année universitaire : 2011/12
Module 1 de Physique (SMIA)

TD Thermodynamique – Correction de la série N°2

Exercice N°1

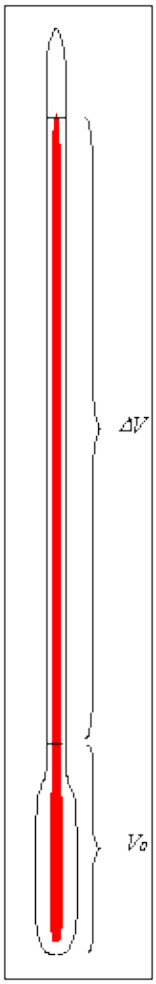
a) Posons : $\theta_{\circ_F} = at_{\circ_C} + b$ et déterminons a et b :

$$\begin{cases} t = 0°C & \leftrightarrow \ \theta = 32°F \\ t = 100°C & \leftrightarrow \ \theta = 32°F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{212-32}{100} = \dfrac{9}{5}\left(°F.°C^{-1}\right) \\ b = 32°F \end{cases} \text{ soit : } \theta\left(°F\right) = 1{,}8t\left(°C\right) + 32$$

b) $t = 30°C \ \Leftrightarrow \ \theta = 86°F$

c) $\theta = t \ \Rightarrow \ \theta\left(°F\right) = t\left(°C\right) = -40$

Exercice N°2



1) La grandeur thermométrique est le volume.
A $\theta = 0°C$ le mercure occupe le volume V_0 qui n'est autre que le volume du réservoir.
A $\theta = 200°C$, il occupe le volume $V_0 + \Delta V$ où ΔV représente le volume de la colonne utile du capillaire ($\Delta V = 24\,mm^3$).
Si $V\left(\theta\right) = V_0\left(1+\alpha\theta\right)$ est l'expression du volume en fonction de la température, nous pouvons identifier :

$$\Rightarrow \ V_0 + \Delta V = V_0\left(1+\alpha\theta\right) \ \Rightarrow \ V_0 = \frac{\Delta V}{\alpha\theta}; \ A.N : \ V_0 = 768\,mm^3$$

2) Masse de mercure à utiliser : $m = \rho_{Hg}.V_0 = 10,44\,g$

3) La sensibilité « s » est définie comme la variation de la grandeur thermométrique pour une variation de température donnée : $s = \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{\Delta V}{\Delta\theta}$
En utilisant l'une ou l'autre de ses relations, nous obtenons :
$s = 0,12\,mm^3.°C^{-1}$.

4) La section du capillaire vaut : $S = \dfrac{\Delta V}{L} = \dfrac{24}{300}mm^2$
Pour une élévation de température $\Delta\theta = 1°C$, l'accroissement de volume est $\Delta V_1 = s.\Delta\theta = 0,12\,mm^3$ et le niveau augmente d'une hauteur :
$l = \dfrac{\Delta V_1}{S} = 1,5\,mm$.

Si l'œil est capable de séparer deux graduations distantes de 0,5 mm, cela correspond alors à une élévation de température de 1/3 °C… ce qui n'est pas très pratique ou usuel. On préférera graduer de 0,5°C en 0,5°C ; la distance qui séparera deux graduations sera donc de 0,75 mm.

Indications supplémentaires :

1) Densité : $d_{Hg} = \rho_{Hg} / \rho_{eau}$; avec $\rho_{Hg} = 13600\, Kg/m^3$ et $\rho_{eau} = 1000\, Kg/m^3$

2) Sensibilité : si G est une grandeur thermométrique la sensibilité du thermomètre est définie par : $s = dG/d\theta$.
   Souvent on appelle aussi, à tort, « sensibilité » le plus petit accroissement de dθ mesurable. Il s'agit en fait de « résolution » appelée aussi « limite de résolution » ou « mobilité ».
   Ex : thermomètre usuel de sensibilité 1 °C (thermomètre d'ambiance) et 0,1 °C (thermomètre médical).

Remarque :

On aurait pu prendre directement la hauteur h du mercure dans la colonne comme grandeur thermométrique et calculer la résolution en (mm /°C).

($\Delta V = V_0 \alpha\theta$ et $\Delta V = h.S\,(hauteur.\text{sec}tion) \Rightarrow h = V_0\alpha\theta / S \Rightarrow s = \dfrac{dh}{d\theta} = \dfrac{V_0\alpha\theta}{S} = 1,5 mm/°C$)

Exercice N°3

Etat initial

$$\begin{cases} Compartiment\ A & \rightarrow & P_0 V_A = n_A^i RT_0 & (1) \\ Compartiment\ B & \rightarrow & P_0 V_B = n_B^i RT_0 & (2) \end{cases}$$

Etat final

$$\begin{cases} Compartiment\ A & \rightarrow & P_A^f V_A = n_A^f RT_A & (3) \\ Compartiment\ B & \rightarrow & P_B^f V_B = n_B^f RT_0 & (4) \end{cases}$$

- Les deux compartiments A et B réunis forment un système fermé, n'échangeant pas de matière avec l'extérieur :

$$n_A^i + n_B^i = n_A^f + n_B^f \qquad (5)$$

- Les deux compartiments A et B communiquent, on a alors à l'équilibre (*état f*) :

$$P_A^f = P_B^f = P \qquad (6)$$

- En remplaçant les expressions des n_A et n_B retirées de (1) à (4) dans (5) et en tenant compte de (6), on obtient :

$$P = P_0 \frac{\dfrac{V_A}{T_0} + \dfrac{V_B}{T_0}}{\dfrac{V_A}{T_A} + \dfrac{V_B}{T_0}}$$

$\underline{A.N}$: $P = 1,872\, bar$; ($\underline{Rappel}$: $1\, bar = 10^5\, Pa$; $1\, atm = 1,01325.10^5\, Pa$)

Exercice N°4

1)

a) $N = n \cdot \aleph_A$; $N = 6,023 \cdot 10^{23} \cdot 10 = 6,023 \cdot 10^{24}$ *particules* .

b) ***i)*** $V = \dfrac{Nk_BT}{P}$; $V = 226,9\, l$, (*en effet*, $PV = nRT$ *avec* $R = k_BT$ *et* $n = N/\aleph_A \Rightarrow PV = Nk_BT$)

ii) $a = V^{\frac{1}{3}}$; $a = 61\, cm$

c) $\rho = N/V$; $\rho = 2,654 \cdot 10^{25}$ $particules/m^3 = 2,654 \cdot 10^{16}$ $particules/mm^3$.

d) $m = M/\aleph_A$; $m = 5,313 \cdot 10^{-26}$ Kg.

e) ***i)*** $e_{C,tr} = \dfrac{3}{2}k_BT$, on peut obtenir ce résultat de deux manières:

- Théorème de l'équipartition de l'énergie : à chaque degré de liberté correspond une énergie de $\dfrac{1}{2}k_BT$, pour une particule en translation, il y a 3 degrés de liberté, donc une énergie $e_{C,tr} = 3 \times \dfrac{1}{2}k_BT$.
- On peut écrire : $\left| \begin{array}{l} P = \dfrac{1}{3}\rho mu^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{N}{V} \cdot mu^2 \text{ avec } PV = Nk_BT \Rightarrow e_{C,tr} = \dfrac{1}{2}mu^2 = \dfrac{3}{2}k_BT \\ \underline{\underline{A.N}} : \quad e_{C,tr} = 565,11 \cdot 10^{-23}\ J \end{array} \right.$

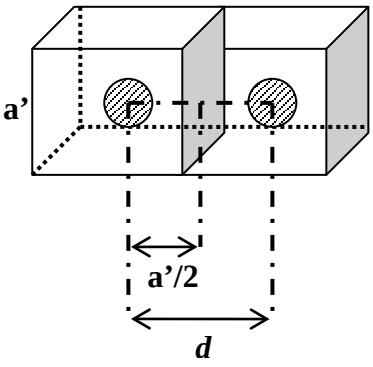
ii) Vitesse quadratique moyenne u : $e_{C,tr} = \dfrac{1}{2}mu^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\dfrac{2 \cdot e_{C,tr}}{m}} = 461,3\, m/s$

($u >$ à la vitesse du son dan l'air sous Conditions normales qui est de l'ordre 340 m/s).

f) $\tau = V/N = k_BT/P$; $\tau = 3,7674 \cdot 10^{-17}$ mm^3 .

2)

a) $a' = \tau^{\frac{1}{3}} = 3,35 \cdot 10^{-19}\,\text{m} = 33,5\,\text{Å}$ (arête du cube élémentaire)



La distance d entre 2 particules sera celle qui sépare les centres de gravité de 2 cubes élémentaires d'arête a' placés côte à côte :

$\text{d} = \dfrac{\text{a}'}{2} + \dfrac{\text{a}'}{2} = \text{a}' = 3,35 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$

b) On a : $\dfrac{\text{d}}{\phi_{O_2}} \approx 10$, les particules d'oxygène sont relativement séparées les unes des autres. Les interactions entre elles (qui varient en $1/r^7$) sont donc très faibles. Par conséquent dans les conditions normales, l'oxygène peut être assimilé en première approximation à un gaz parfait.

TD Thermodynamique – Correction de la série N°3

Exercice N°1

1) Transformation isotherme réversible $\Rightarrow P_{ext} = P\left(\text{pression du gaz}\right)$

$$G.P\left(n=1\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta W = -P_{ext}\, dV = -P\, dV \\ P = \dfrac{RT}{V} = \dfrac{RT_1}{V} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W_{rév} = \int_{12} \delta W_{rév} = \int_{12} -pdV$$

$$\Rightarrow \quad W_{rév} = -RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -RT_1\, Ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Soit encore en tenant compte du fait que une isotherme : *PV=Cte*

$$W_{rév} = RT_1\, Ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = RT_1\, Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right); \qquad \underline{\underline{A.N}}: \quad W_{rév} = RT_1 Ln5 = 4017\ J$$

2) Transformation brusque (irréversible)

Il faut appliquer une pression extérieure égale à P_2 pour ramener le gaz de l'état « 1 » à l'état « 2 » :

$$\Rightarrow \quad \delta W_{irrev} = -P_{ext}\, dV \quad \Rightarrow \quad W_{12} = -P_2\left(V_2 - V_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} W_{irrév} = -P_2\left(\dfrac{RT_2}{P_2} - \dfrac{RT_1}{P_1}\right) \\ T_1 = T_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W_{irrév} = -RT_1\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

A.N :

$W_{irrév} = 4RT_1 = 9984\ J$. On remarque bien que : $W_{irrév} \succ W_{rév}$

3) Compression brusque de P_1 à P_3=2P_2 puis de P_3 à P_2

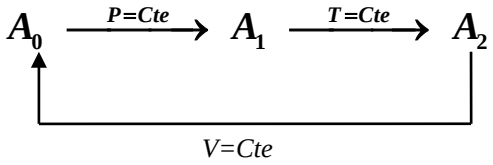
$$\begin{aligned} W_{1\hat{2}3} = W_{13} + W_{32} &= -P_3\left(V_3 - V_1\right) - P_2\left(V_2 - V_3\right) \\ &= -2P_2\left(V_3 - V_1\right) - P_2\left(V_2 - V_3\right) \\ &= P_2\left(-V_3 + 2V_1 - V_2\right) \end{aligned}$$

$$Or \quad T_1 = T_2 = T_3 \quad et \quad P_1 = \frac{1}{5}P_2 \quad \Rightarrow \quad W_{1\hat{2}3} = P_2\left(-\frac{RT_1}{2P_2} + 2\cdot\frac{5RT_1}{P_2} - \frac{RT_1}{P_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad W_{1\hat{2}3} = \frac{17}{2}RT_1$$

A.N : $W_{1\hat{2}3} = 21216\ J$

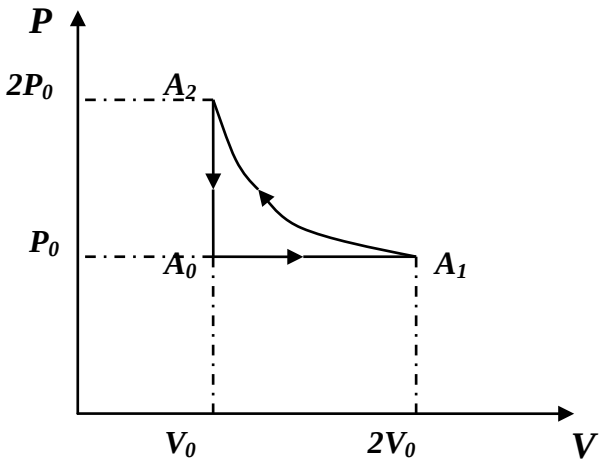
Exercice N°2



1) Etats du G.P (*1mole de G.P*)

$$A_0\begin{vmatrix} P_0 = 2\cdot10^5\ Pa \\ V_0 = 14l = 14\cdot10^{-3}\ m^3 \\ T_0 = \dfrac{P_0V_0}{R} = 336,5\,K \end{vmatrix} \xrightarrow{P=Cte} A_1\begin{vmatrix} P_1 = P_0 = 2\cdot10^5\ Pa \\ V_1 = 2V_0 = 28\cdot10^{-3}\ m^3 \\ T_1 = \dfrac{P_1V_1}{R} = 2T_0 = 673\,K \end{vmatrix} \xrightarrow{T=Cte} A_2\begin{vmatrix} P_2 = \dfrac{P_1V_1}{V_2} = \dfrac{P_1V_1}{V_0} = 2P_0 = 4\cdot10^5\ Pa \\ V_2 = V_0 = 14\cdot10^{-3}\ m^3 \\ T_2 = T_1 = 2T_0 = 673\,K \end{vmatrix}$$

- **Diagramme de Clapeyron**



2) Travaux et chaleurs

- **Travaux**

$$\begin{cases} W_{A_0A_1} = -P_0\left(2V_0 - V_0\right) = -P_0V_0 = -2800\ J \\ W_{A_1A_2} = RT_1Ln\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right) = 2RT_0Ln\left(2\right) = 3881\,J \\ W_{A_2A_0} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W_{Cycle} = 1081\,J$$

- **Chaleurs**

Cycle : $\Delta U = 0 \;\Rightarrow\; W_{Cycle} + Q_{Cycle} = 0$

Pour une mole de G.P, Q_{Cycle} échangée est : $Q_{Cycle} = -W_{Cycle} = -1081\,J$

Au cours du cycle, le système reçoit du travail ($W_{Cycle}>0$) qu'il restitue entièrement à l'extérieur sous forme de chaleur ($Q_{Cycle}<0$).

Exercice N°3

A) Système isolé

- A l'équilibre, le gaz parfait dans le compartiment C_1 est dans l'état (P_1, V_1, T_1). Celui qui est dans C_2 est à l'état (P_2, V_2, T_2), avec $P_2=P_1$ (car équilibre mécanique).
- Les transformations sont adiabatiques $\Rightarrow PV^{\gamma}=Cte$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_0V_0^{\gamma}=P_1V_1^{\gamma} & \leftarrow(1) \\ 2P_0V_0^{\gamma}=P_2V_2^{\gamma}=P_1V_2^{\gamma} & \leftarrow(2) \end{cases} \quad avec \quad V_1+V_2=2V_0 \quad (Cylindre\ indéformable)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow 2^{\frac{1}{\gamma}}=\frac{V_2}{V_1}=\frac{2V_0}{V_1}-1 \Rightarrow \frac{V_0}{V_1}=\frac{1}{2}\left(1+2^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

$$Et\,(1) \Rightarrow P_1=P_0\cdot\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma}=P_0\left[\frac{1}{2}\left(1+2^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right]^{\gamma}$$

Enfin, on a :

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_0V_0}{T_0} \Rightarrow T_1=\frac{P_1V_1}{P_0V_0}\cdot T_0=\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}\cdot T_0=\left(\frac{1+2^{\frac{1}{\gamma}}}{2}\right)^{\gamma-1}\cdot T_0$$

D'autre part :

$$V_2=2V_0-V_1\,;\quad P_2=P_1\,;\quad \frac{P_2V_2}{T_2}=\frac{2P_0V_0}{T_0} \Rightarrow T_2=\frac{P_2V_2}{2P_0V_0}\cdot T_0$$

$\underline{\underline{A.N}}$: $P_0=1atm\,;\ V_0=2l\,;\ T_0=300K\,;\ \gamma=7/5$

$$\begin{cases} P_1=1,48atm\,;\ V_1=1,51l\,;\ T_1=335K \\ P_2=1,48atm\,;\ V_2=2,49l\,;\ T_2=276K \end{cases}$$

B) Système non isolé

1) Equilibre mécanique $\Rightarrow P_1=P_2=5P_0=5atm$

- Le gaz dans C_2 subit une compression adiabatique réversible.

$$\Rightarrow PV^{\gamma}=Cte \Rightarrow P_0V_0^{\gamma}=P_2V_2^{\gamma} \Rightarrow V_2=V_0\cdot\left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{Et } \frac{P_2V_2}{T_2}=\frac{P_0V_0}{T_0} \Rightarrow T_2=T_0\cdot\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

- Dans C_1, le gaz est dans l'état : $P_1=5P_0\,;\quad V_1=2V_0-V_2 \quad et \quad T_1=\left(\frac{P_1V_1}{P_0V_0}\right)\cdot T_0$

$\underline{\underline{A.N}}$: $P_0=1atm\,;\ V_0=2l\,;\ T_0=300K\,;\ \gamma=7/5$

$$\begin{cases} P_2=5atm\,;\ V_2=2\cdot5^{-\frac{5}{7}}l=0,63l\,;\ T_2=300\cdot5^{\frac{2}{7}}K=475K \\ P_1=5atm\,;\ V_1=3,37l\,;\ T_1=2527K \end{cases}$$

2) Variation d'énergie interne et chaleur fournie par R

- Dans C_1 : $\Delta U_1 = \dfrac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1} \Rightarrow \Delta U_1 = 3712,5\,J$
- Dans C_2 : $\Delta U_2 = \dfrac{P_2V_2 - P_0V_0}{\gamma - 1} \Rightarrow \Delta U_2 = 287,5\,J$
- La résistance chauffante R, a fournit l'énergie : $Q = \Delta U_1 + \Delta U_2$

  $\underline{\underline{A.N}}$: $Q = 4000\,J = 4\left(kJ\right)$

TD Thermodynamique – Correction de la série N°4

Exercice N°1

1) Au cours du mélange, le système global est isolé :

a) Principe zéro :

$$Q_1 + Q_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 C_{pm}\left(T_f - T_1\right) + m_2 C_{pm}\left(T_f - T_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

$$\underline{A.N}: \left| \begin{array}{l} \rho_{eau} = 1\,g/cm^3 = 1\,kg/l \quad \rightarrow \quad m_1 = 40\,kg\,; \quad m_2 = 30\,kg \\ T_1 = 343\,K\,; \quad T_2 = 283\,K \quad \rightarrow \quad T_f = 317,3\,K \quad soit \quad t_f = 44,3°C \end{array} \right.$$

b) Variation d'entropie au cours du mélange

La transformation étant irréversible, pour calculer ΔS, on imagine une transformation réversible équivalente (c.a.d. : qui a les mêmes états extrêmes que la transformation réelle). Cette Transformation réversible imaginée n'est qu'un artifice de calcul qui découle du fait que S est une grandeur d'état (et que ΔS ne dépend donc, que de l'état initial et de l'état final).

Ainsi : $\Delta S_1 = \left(\Delta S_1\right)_{imaginée} = \int_{T_1}^{T_f} m_1 C_{pm} \cdot \frac{dT}{T} = m_1 C_{pm} Ln \frac{T_f}{T_1}$

De même $\Delta S_2 = \left(\Delta S_2\right)_{imaginée} = m_2 C_{pm} Ln \frac{T_f}{T_1}$

Pour tout le mélange : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$

A.N : $\Delta S_1 = -13,02\,kJ \cdot K^{-1}\,; \quad \Delta S_2 = 14,35\,kJ \cdot K^{-1}\,; \quad \Delta S = 1,32\,kJ \cdot K^{-1}$

La transformation est irréversible, son entropie ne peut qu'augmenter ($\Delta S > 0$).

2) Proportions d'un mélange

A partir de l'expression de T_f on a : $\left(m_1 + m_2\right) T_f = m_1 T_1 + m_2 T_2$

Remplaçons m_2 par $\left(m_2 + m_1\right) - m_1$: $\Rightarrow \quad \left(m_1 + m_2\right)\left(T_f - T_2\right) = m_1\left(T_1 - T_2\right)$

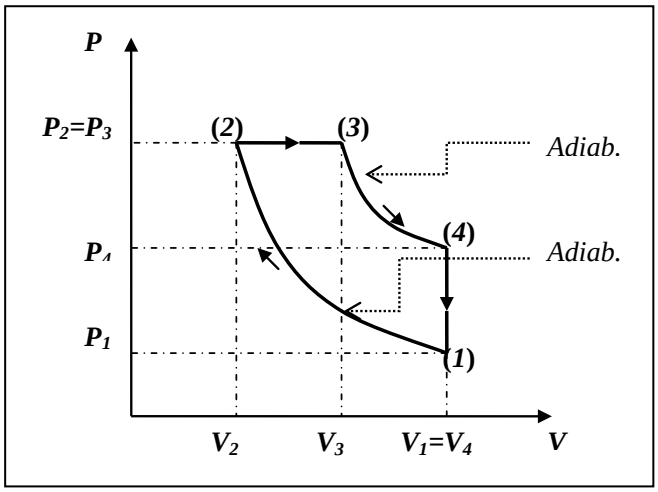
D'où $m_1 = \left(m_1 + m_2\right) \cdot \frac{T_f - T_2}{T_1 - T_2}$ et m_2 se déduit par : $m_2 = \left(m_2 + m_1\right) - m_1$

A.N : *données* : $m_1 + m_2 = 150\,Kg\,; t_1 = 75°C\,; t_2 = 12°C\,; t_f = 35°C$

$\Rightarrow \quad m_1 = 150 \cdot \frac{35 - 12}{75 - 12} = 54,76\,Kg \quad et \quad m_2 = 95,24\,Kg \quad \left(en\ remarquant\ \Delta t = \Delta T\right)$

Il faut donc : *54,8 l* d'eau à *75 °C* et *95,2 °C* d'eau à *12 °C.*

Exercice N°2 : Cycle Diesel



❖ **Caractérisation de l'état (*2*)**

$\mathfrak{I}_{12}$ étant adiabatique réversible, la loi de Laplace s'exprime comme suit :

$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \quad avec \quad a = \dfrac{V_1}{V_2}$

D'où : $P_2 = P_1 \cdot a^{\gamma}$

De plus : $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot a^{\gamma-1}$

Finalement l'état (*2*) : $\begin{vmatrix} P_2 = P_1 \cdot a^{\gamma} \\ V_2 = V_1 \cdot a^{-1} \\ T_2 = T_1 \cdot a^{\gamma-1} \end{vmatrix}$

❖ **Caractérisation de l'état (*3*)**

$P_3 = P_2 = P_1 \cdot a^{\gamma} \quad et \quad V_3 = \dfrac{V_4}{b} = \dfrac{V_1}{b} \qquad \left(car\ V_1 = V_4\right)$

$\mathfrak{I}_{23}$ isobare $\Rightarrow \dfrac{T_3}{V_3} = \dfrac{T_2}{V_2} \Rightarrow T_3 = \dfrac{V_3}{V_2} \cdot T_2 = \dfrac{V_1}{b} \cdot \dfrac{a}{V_1} = T_1 \cdot \dfrac{a^{\gamma}}{b}$

L'état (*3*) : $\begin{vmatrix} P_3 = P_1 \cdot a^{\gamma} \\ V_3 = \dfrac{V_1}{b} \\ T_3 = T_1 \cdot \dfrac{a^{\gamma}}{b} \end{vmatrix}$

❖ **Caractérisation de l'état (*4*)**

$\mathfrak{I}_{34}$ adiabatique réversible $\Rightarrow P_4V_4^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma} \quad or \quad V_4 = V_1 \Rightarrow P_4 = P_3 \cdot \left(\dfrac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma}$

$\Rightarrow P_4 = P_3 \cdot b^{-\gamma} \quad soit \quad P_4 = P_1 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\gamma}$

De plus $\mathfrak{I}_{43}$ isochore, $V = Cte \Rightarrow \dfrac{P_1}{T_1} = \dfrac{P_4}{T_4} \Rightarrow T_4 = T_1 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\gamma}$

Finalement l'état (4) : $\begin{vmatrix} P_4 = P_1 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\gamma} \\ V_4 = V_1 \\ T_4 = T_1 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\gamma} \end{vmatrix}$

❖ **Application numérique**

$$\begin{array}{lll} P_1 = 10^5\ Pa & T_1 = 300\,K & V_1 = 2,496\cdot 10^{-2}\ m^3 = 24,96\,l \\ P_2 = 2,17\cdot 10^6\ Pa & T_2 = 722,5\,K & V_2 = 2,773\cdot 10^{-3}\ m^3 = 2,77\,l \\ P_3 = 2,17\cdot 10^6\ Pa & T_3 = 2167,4\,K & V_3 = 8,32\cdot 10^{-3}\ m^3 = 8,32\,l \\ P_4 = 4,66\cdot 10^5\ Pa & T_4 = 1396,7\,K & V_4 = 2,496\cdot 10^{-2}\ m^3 = 24,96\,l \end{array}$$

Remarque : $n = 1 mole \quad et \quad V_1 = \dfrac{RT_1}{P_1}$

2) Travaux et chaleurs

❖ $\mathfrak{T}_{12}$ adiabatique $\Rightarrow \quad Q_{12} = 0\,; \qquad W_{12} = \Delta U_{12} = 1\cdot C_{VM}\left(T_2 - T_1\right)$

❖ $\mathfrak{T}_{23}$ isobare $\Rightarrow \quad W_{23} = -P_2\left(V_3 - V_2\right); \qquad Q_{23} = \Delta H_{23} = 1\cdot C_{PM}\left(T_3 - T_2\right) = \gamma\cdot C_{VM}\left(T_3 - T_2\right)$

❖ $\mathfrak{T}_{34}$ adiabatique $\Rightarrow \quad Q_{34} = 0\,; \qquad W_{34} = \Delta U_{34} = C_{VM}\left(T_4 - T_3\right)$

❖ $\mathfrak{T}_{41}$ isochore $\Rightarrow \quad W_{41} = 0\,; \quad Q_{41} = \Delta U_{41} = C_{VM}\left(T_1 - T_4\right)$

Notons bien que $Q_{23} \succ 0 \quad \left(T_3 \succ T_2\right)$, il s'agit donc de la chaleur reçue par le système, tandis que $Q_{41} \prec 0 \quad \left(T_1 \prec T_4\right)$ est la chaleur restituée par le système.

❖ Application numérique

Transformation	***W(J)***	***Q(J)***
$(1) \rightarrow (2)$	8788	0
$(2) \rightarrow (3)$	$-1,2\cdot 10^4$	$4,2\cdot 10^4$
$(3) \rightarrow (4)$	$-1,6\cdot 10^4$	0
$(4) \rightarrow (1)$	0	$-2,28\cdot 10^4$
Bilan	$\mathbf{-1,92\cdot 10^4}$	$\mathbf{+1,92\cdot 10^4}$

On vérifie bien que $\Delta U_{cycle} = 0 = W_{cycle} + Q_{cycle}$

2) Rendement du moteur

$$\Re = -\frac{W_{cycle}}{Q_{23}}; \qquad Or \quad W_{cycle} + Q_{cycle} = 0 = W_{cycle} + Q_{23} + Q_{41}$$

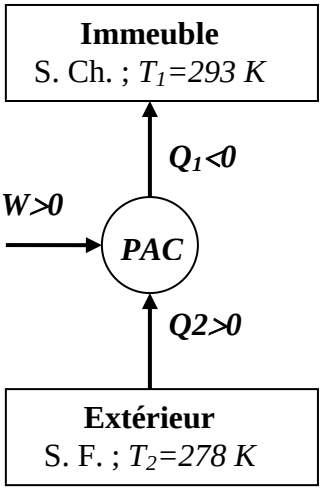
$$\Rightarrow \quad \Re = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{\gamma\left(T_3 - T_2\right)}$$

Soit en remplaçant T_4 , T_3 et T_2 par leurs expressions :

$$\Re = 1 + \frac{1 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\gamma}}{\gamma a^{\gamma}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)} \quad Soit \quad \Re = 1 + \frac{b^{\gamma} - a^{\gamma}}{\gamma\left(ab\right)^{\gamma-1}\left(a - b\right)}\ ; \qquad \underline{\underline{AN}}: \quad \Re = 45,8\,\%$$

Remarque : en calculant le rendement à partir de l'expression $\Re = -\dfrac{W_{cycle}}{Q_{23}}$, on trouve la même valeur (aux arrondies près), soit $\Re = 45,7\,\%$.

Exercice N°3 : Pompe à chaleur classique



a) Conditions de fonctionnement et schéma

- La puissance consommée est minimale lorsque le fonctionnement de la *P.A.C.* est réversible.
- Ci-contre le schéma énergétique de la *P.A.C.* avec les flèches qui indiquent le sens des échanges énergétiques.

b) Puissance minimale consommée

La *P.A.C.* fonctionne en cycle réversible :

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta U_{cy} = 0 = W + Q_1 + Q_2 \\ \Delta S_{cy} = 0 = \dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} \end{cases}$$

En raisonnant sur N cycles correspondant à $1h = \tau = 3600\,s$: $Q_1 = -2\cdot 10^8\ J$; la puissance minimale consommée est : $P = \dfrac{W}{\tau}$

Or $-W = Q_1 + Q_2 = Q_1\left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right)$.

Soit $W = -Q1\left(1 - \dfrac{T2}{T1}\right) = 10\,238,9\,kJ \approx 10,24\cdot 10^6\ J$

Et $P = \dfrac{W}{\tau} = 2,84\,kW \quad \leftarrow \quad (1kW = 1kJ/s)$

c) Coefficient de performance

Le coefficient de performance maximal (ou efficacité thermique) est par définition :

$$e_p = -\frac{Q_1}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 19,5$$

Si l'énergie W chauffait directement l'immeuble, nous aurions $-Q_1 = W \Rightarrow e_p = 1$, or $e_p\,(=19,5)$ est nettement supérieure à 1, d'où le terme efficacité thermique ou performance ; car Q_2 prélevée à l'extérieur est gratuite.

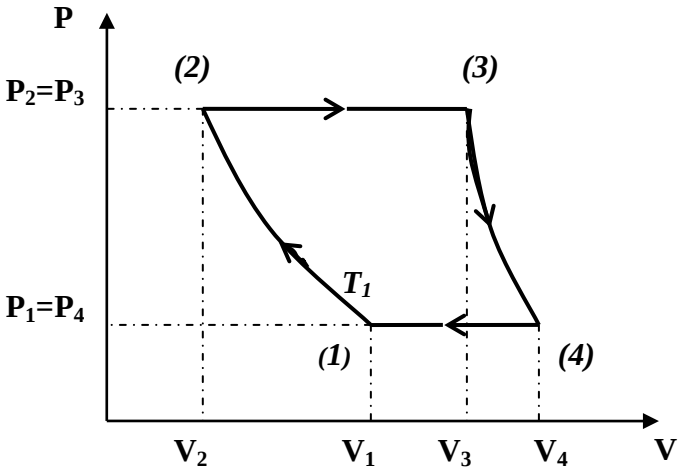
d) Température t_1 pour que e_p soit maximale

à T_2 fixée, $e_p(T_1)$ est maximum lorsque T_1 tend vers T_2, mais cela n'a pas d'intérêt pratique. En réalité ; on veut maintenir la température de l'immeuble à 20°C et c'est la température extérieure qui varie : si $T_2 \nearrow$, $e_p \searrow$ et il faut fournir plus de W à la *P.A.C.*

Exercice N°4 : Moteur thermique à air

1) Diagramme de Clapeyron

- $\mathfrak{I}_{12}$: isotherme
- $\mathfrak{I}_{23}$: isobare
- $\mathfrak{I}_{34}$: adiabatique
- $\mathfrak{I}_{41}$: isobare



2) Les P_i, V_i, T_i ; (i=1,…, 4)

$$Etat\,1\begin{cases}P_1=10^5\,Pa\\V_1=1,00039\,\square\,1m^3\\T_1=360\,K\end{cases}\qquad Etat\,2\begin{cases}P_2=8\cdot10^5\,Pa\\V_2=V_1/8=0,125\,m^3\\T_2=360\,K\end{cases}$$

$$Etat\,3\begin{cases}P_3=P_2=8\cdot10^5\,Pa\\V_3=0,5\,m^3\\T_3=1440\,K\end{cases}\qquad Etat\,4\begin{cases}P_4=P_1=10^5\,Pa\\V_4=\left(P_3/P_4\right)^{1/\gamma}\cdot V_3=2,208\,m^3\\T_4=\left(V_4/V_1\right)\cdot T_1=795\,K\end{cases}$$

Etat	***P_i* (Pa)**	***V_i* (m^3)**	***T_i* (K)**
(1)	10^5	1	360
(2)	$8\cdot10^5$	0,125	360
(3)	$8\cdot10^5$	0,5	1440
(4)	10^5	2,208	795

3) Travaux

- $\mathfrak{I}_{12}$ compression isotherme :
  - $W_{12}=\int -PdV=-nRT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=nRT_1Ln\frac{V_1}{V_2}=nRT_1Ln\frac{P_2}{P_1}$
  - $W12=33,4\times8,32\times360Ln8\,\square\,208\,kJ$
- $\mathfrak{I}_{23}$ isobare :
  - $W_{23}=-P_2\left(V_3-V_2\right)$
  - $W_{23}=-8\times\left(0,5-0,125\right)\times10^5=-300\,kJ$

- $\Im_{34}$ adiabatique :
  - $W_{34} = \dfrac{P_4V_4 - P_3V_3}{\gamma - 1}$
  - $W_{34} = \dfrac{10^5 \times 2,208 - 8 \cdot 10^5 \times 0,5}{0,4} = -448\,kJ$
- $\Im_{41}$ Isobare :
  - $W_{41} = -P_1\left(V_1 - V_4\right)$
  - $W_{41} = -10^5 \times \left(1 - 2,208\right) = 121\,kJ$
- Le cycle :
  - $W_{cy} = \left(208 + 121 - 300 - 448\right)kJ = -419\,kJ$

4) Les quantités de chaleur

- $\Im_{12}$ compression isotherme :
  - $Q_{12} = -W_{12} = -nRT_1Ln\dfrac{P_2}{P_1}$
  - $Q_{12} = -2,08 \cdot 10^5\ J = -208\,kJ \prec 0$
- $\Im_{23}$ isobare :
  - $Q_{23} = \Delta_p\left(T_3 - T_2\right) = \dfrac{n\gamma R}{\gamma - 1}\left(T_3 - T_2\right)$
  - $Q_{23} = 1050\,kJ \succ 0$
- $\Im_{34}$ adiabatique :
  - $Q_{34} = 0$
- $\Im_{41}$ Isobare :
  - $Q_{41} = \Delta_p\left(T_1 - T_4\right) = \dfrac{n\gamma R}{\gamma - 1}\left(T_1 - T_4\right)$
  - $Q_{41} = -423\,kJ \prec 0$
- Le cycle :
  - $Q_{cy} = \left(-208 + 1050 + 0 - 423\right)kJ = 419\,kJ$

5) Tableau récapitulatif

$\Im_{ij}$	W_{ij} (kJ)	Q_{ij} (kJ)
$\Im_{12}$	208	-208
$\Im_{23}$	-300	1050
$\Im_{34}$	-448	0
$\Im_{41}$	121	-423
Cycle	W_{cy} = - 419	Q_{cy} = + 419

6) Quantité de chaleur reçue et rendement

$Q_{reçue} \succ 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{reçue} = Q_{23} = 1050\,kJ$

a) Rendement $\Re$

$$\Re = -\frac{W_{cy}}{Q_{23}} = \frac{419}{1050} \approx 40\%$$

b) Rendement Carnot $\Re_C$

$$\Re_C = \frac{T_C - T_F}{T_C} \quad \left(en\ effet : \quad \Re_C = -\frac{W_{cy}}{Q_{reçue}} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \right)$$

$\underline{A.N}$: $T_C = 1440\,K \quad et \quad T_F = 360\,K \quad \Rightarrow \quad \Re_C = 75\%$

c) Comparaison

Bien évidemment $\Re \prec \Re_C$

7) Variations d'entropie

- $\Im_{12}$ compression isotherme :
  - $\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T_1} = -\frac{208}{360} kJ/K \approx -0,578\ kJ/K$
- $\Im_{23}$ isobare :
  - $\Delta S_{23} = \int \delta_p \frac{dT}{T} = \delta_p Ln\frac{T_3}{T_2} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \cdot Ln\frac{T_3}{T_2} \approx 1,348\ kJ/K$
- $\Im_{34}$ adiabatique :
  - $\Delta S_{34} = 0$
- $\Im_{41}$ Isobare :
  - $\Delta S_{41} = \int \delta_p \frac{dT}{T} = \delta_p Ln\frac{T_1}{T_4} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \cdot Ln\frac{T_1}{T_4} \approx -0,771\ kJ/K$
- Le cycle :
  - $\Delta S_{cycle} = (-O,578 + 1,348 - 0,771)\,kJ/K = -0,001 kJ/K \approx 0\,kJ/K$